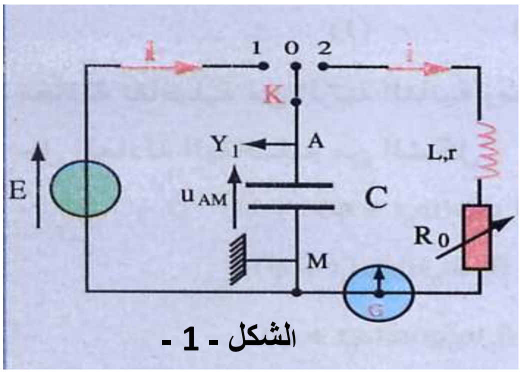
الاهتزازات الحرة في دارة RLC على التسلسل

1 - تفريغ مكثفة في وشيعة تحريضية (R, L, C) :

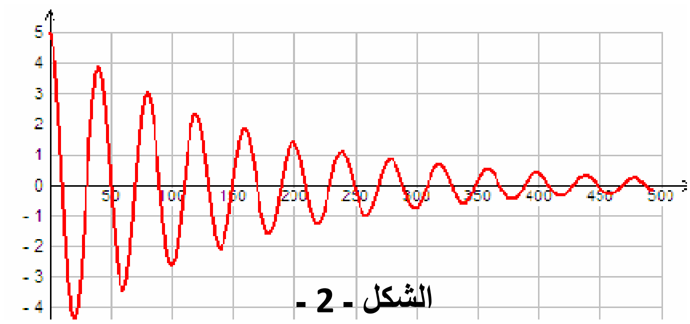
1 - 1 - الدراسة التجريبية :

1 - 1 - 1 - إبراز الطابع الاهتزازي للدارة (R, L, C) :

نشاط : نحقق الدارة الكهربائية التالية : الشكل - 1 -



الشكل - 1 -

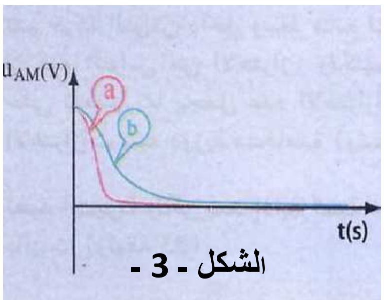


الشكل - 2 -

نشحن المكثفة بوضع البادلة في الوضع 1 ثم نفرغها بوضع البادلة في الوضع 2 فنحصل على البيان كما في الشكل - 2 - حيث تكون $R_0 = 0$ أي المقاومة المكافئة $R = r$ (مقاومة صغيرة)

نتيجة : إن الاهتزازات الحاصلة في الدارة (R, L, C) هي اهتزازات حرة لأن الدارة لا تتلقى طاقة من الوسط الخارجي ومتخامدة لأن سعتها تتناقص بسرعة والنظام في الدارة شبه دوري (T)

** نزيد من قيمة المقاومة المكافئة R فنلاحظ تزايد تخامد الاهتزازات وعندما نصل إلى قيمة كبيرة للمقاومة ، عندها نشاهد على شاشة راسم الاهتزاز البيان المبين في الشكل - 3 -



الشكل - 3 -

1 - 2 - الدراسة النظرية :

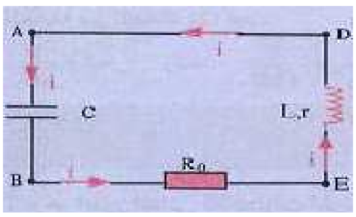
1 - 2 - 1 - حالة الاهتزازات حرة متخامدة (النظام شبه الدوري) :

**** المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$ للدارة الحقيقية (R, L, C) :**

نحقق الدارة الكهربائية التالية :

حيث المكثفة مشحونة .

بتطبيق قانون جمع التوترات :



$$U_{AB}+U_{BE}+U_{ED}+U_{DA}=0$$

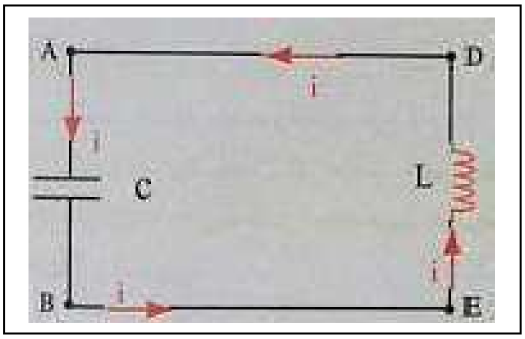
$$\frac{q}{C}+R_0 i+ri+L\frac{di}{dt}+0=0 \Rightarrow \frac{q}{C}+(R_0+r)i+L\frac{di}{dt}=0$$

نضع $R=R_0+r$ ولدينا : $i(t)=\frac{dq}{dt}$

ومنه نكتب : $\boldsymbol{\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{q}{LC}=0}$ ……… (1) $\Leftarrow$ $L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$

و هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية تميز الاهتزازات الكهربائية الحرة المتخامدة في الدارة (R,L,C) حلها خارج البرنامج .

1 - 2 - 2 - حالة الاهتزازات حرة غير متخامدة (جملة مثالية (L,C)) :



المعادلة التفاضلية للدارة الكهربائية (L,C) :

نحصل على المعادلة التفاضلية لهذه الدارة بتعويض $R=0$ في المعادلة (1) فنجد :

$$\boldsymbol{\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q(t)=0}$$

و هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لـ q تميز الاهتزازات الكهربائية الحرة غير المتخامدة في الدارة (L,C) حلها دالة جيبية من الشكل : $q(t)=Q_0cos(\omega_0 t+\varphi)$ حيث Q_0 الشحنة العظمى للمكثفة .

العبارة اللحظية للتيار الكهربائي $i(t)$:

لدينا : $\boldsymbol{i(t)}=\frac{dq}{dt}$ و $q(t)=Q_0cos(\omega_0 t+\varphi)$

إذن : $\boldsymbol{i(t)=-Q_0\omega_0 sin(\omega_0+\varphi)=-I_0 sin(\omega_0+\varphi)}$ حيث : $\boldsymbol{I_0=Q_0\omega_0}$

العبارة اللحظية للتوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة $U_C(t)$:

$\boldsymbol{U_C(t)=\frac{q}{C}=\frac{Q_0}{C}cos(\omega_0 t+\varphi)=U_0cos(\omega_0 t+\varphi)}$ حيث : $U_0=\frac{Q_0}{C}$

نبض الاهتزازات الحرة غير المتخامدة ω_0 :

لدينا : $\boldsymbol{\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q(t)=0}$ ....(1)

$$\boldsymbol{q(t)=Q_0cos(\omega_0 t+\varphi)} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dq}{dt}=-Q_0\omega_0 sin(\omega_0 t+\varphi)} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega_0^2 Q_0 cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2q}{dt^2} = -\omega_0^2 q(t)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q(t) = 0 \quad ....(2)$$

بمطابقة العلاقتين (1) و (2) نجد أن : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

** الدور الذاتي للاهتزازات الحرة غير المتخامدة T_0 : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

** التواتر الذاتي للاهتزازات الحرة غير المتخامدة f_0 : $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

2 ـ الطاقة في الدارة المهتزة :

** الطاقة في الدارة المثالية (L , C) :

أ ـ الطاقة المخزنة في المكثفة : $E_{(C)} = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}$

ب ـ الطاقة المخزنة في الوشيعة : $E_{(L)} = \frac{1}{2} L\, i^2(t)$

جـ ـ طاقة الدارة (L , C) :

$$E = E_{(C)} + E_{(L)} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2 cos^2(\omega_0 t+\varphi)}{C} + \frac{1}{2} L Q_0^2\, \omega_0^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

لدينا : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ومنه : $E = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2 cos^2(\omega_0 t+\varphi)}{C} + \frac{1}{2} L Q_0^2 \frac{1}{LC} sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}[cos^2(\omega_0 t + \varphi) + sin^2(\omega_0 t + \varphi)] \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$$

يمكن أن نبين أيضاأن طاقة الدارة هي : $E = \frac{1}{2} L\, I_0^2$

نتيجة : إن طاقة الدارة (L , C) مقدار ثابت في كل لحظة ونكتب :

$$E = E_C + E_L = cst \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{1}{2} L\, I_0^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$$

** الطاقة في الدارة الحقيقية $(R\ , L , C)$:

لدينا : $E(t) = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C} + \frac{1}{2} L\, i^2(t)$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2C}\,2q\frac{dq}{dt}+\frac{1}{2}\,L\,2i\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{dE}{dt}=\frac{q}{C}\,\frac{dq}{dt}+\,L\,i\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{dE}{dt}=\frac{q}{C}\,\frac{dq}{dt}+L\frac{dq}{dt}\,\frac{d^2q}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dt}=\left(L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q(t)}{C}\right)\frac{dq}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

لدينا من المعادلة التفاضلية :

$$L\,\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q(t)}{C}=\,-Ri \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من (1) و (2) نجد :

$$\frac{dE}{dt}=-Ri\frac{dq}{dt}=-Ri^2 \Rightarrow \frac{dE}{dt}=-Ri^2 \Rightarrow E(t)\neq\,C^{te}$$

أي أن الطاقة في الدارة الحقيقية غير ثابتة لأن جزءا منها يفقد بالتحول الحراري بفعل جول في المقاومة الأومية وهذا هو سبب تخامد الاهتزازات .

3 ـ الدراسة الطاقوية للدارة المثالية (L , C) :

** المعادلة التفاضلية للدارة المثالية (L , C) :

لدينا :

$$E=\frac{1}{2}\,\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}\,L\,i^2\,=\,C^{te}$$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن نجد :

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2C}\,2q\,\frac{dq}{dt}+\frac{1}{2}\,L2i\frac{di}{dt}=0 \Rightarrow \frac{q}{C}\,\frac{dq}{dt}+L\,\frac{dq}{dt}\,\frac{d^2q}{dt^2}=0 \Rightarrow \left(L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q(t)}{C}\right)\frac{dq}{dt}=0$$

لدينا :

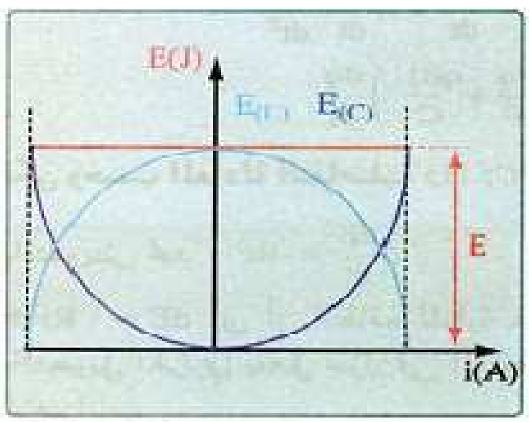
$$\frac{dq}{dt}\neq 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q(t)=0$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لـ q متجانسة .

** ـ مخططات الطاقة بدلالة شدة التيار الكهربائي في الدارة المثالية (L , C) :

نرسم مخططات الطاقة من العلاقات :

* $$E_{(C)}=\frac{1}{2}\,\frac{q^2(t)}{C}$$
* $$E_{(L)}=\frac{1}{2}\,L\,i^2(t)$$
* $$E=\,E_{(C)}+E_{(L)}$$



مخططات الطاقة بدلالة شدة التيار الكهربائي.

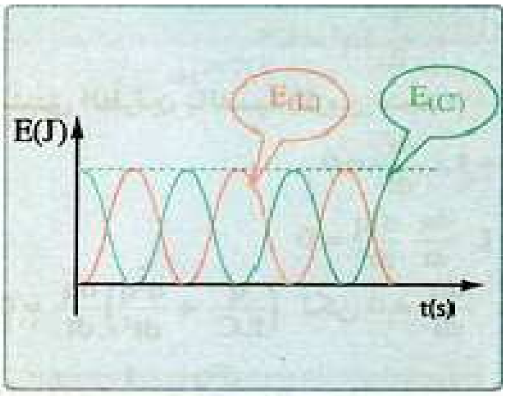
** ـ مخططات الطاقة بدلالة الزمن في الدارة المثالية (L , C) :

نرسم مخططات الطاقة من العلاقات :

** $$E_{(C)} = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}[cos^2(\omega_0 t + \varphi)]$$

** $$E_{(L)} = \frac{1}{2}\,L\,i^2(t) = \frac{1}{2}LQ_0^2\omega_0^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

** $$E = E_{(C)} + E_{(L)}$$



مخططات الطاقة بدلالة الزمن في الدارة L, C.

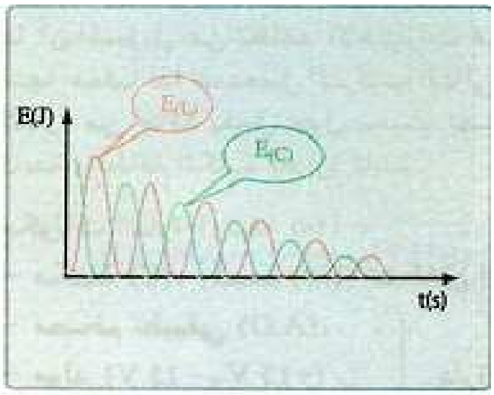
** ـ مخططات الطاقة بدلالة الزمن في الدارة الحقيقية (R , L , C) :

نرسم مخططات الطاقة من العلاقات :

* $$E_{(C)} = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}$$

* $$E_{(L)} = \frac{1}{2}\,L\,i^2(t)$$

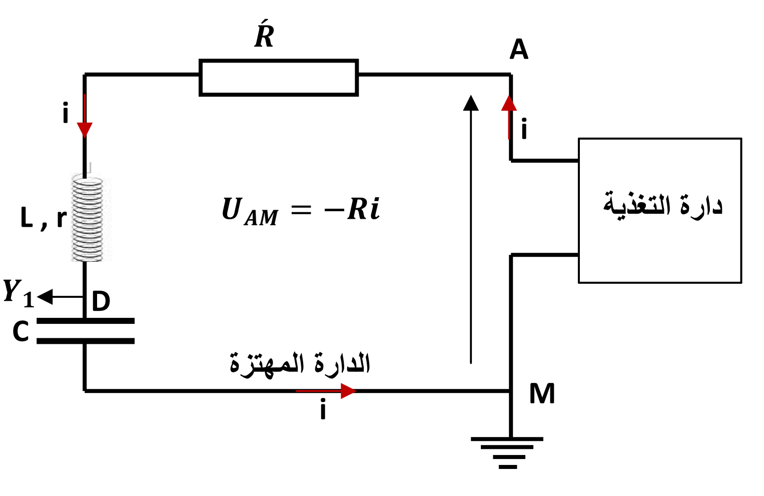
* $$E = E_{(C)} + E_{(L)}$$



مخططات الطاقة بدلالة الزمن في الدارة R, L, C.

4 ـ تغذية الاهتزازات الكهربائية بتعويض التخامد :

إن سبب تخامد الاهتزازات هو الضياع في الطاقة ويعود ضياعها بفعل جول في مقاومة الدارة (R , L , C) والتي لا يمكن التخلص منها عمليا ، لتعويض هذا الضياع نضم على التسلسل مع ثنائي القطب (R , L , C) تركيب إلكتروني يدعى تركيب ذو المقاومة السالبة ، والشكل المقابل يمثل التركيب الإلكتروني الذي يغذي ثنائي القطب (R , L , C) . فالطاقة الكهربائية التي يقدمها التركيب الإلكتروني لثنائي القطب (R , L , C) يجب أن تكون في كل لحظة مساوية للطاقة التي تضيع بفعل جول في المقاومة $R = \acute{R} + r$.

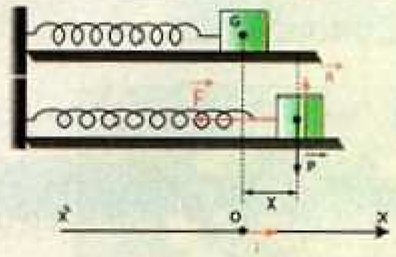


الأستاذ : داهل محمد الطاهر

التطابق بين الميكانيك والكهرباء

التطابق ميكانيك كهرباء

اهتزازات جملة ميكانيكية حرة ومثالية



نطبق قانون نيوتن الثاني :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}_G$$

بإسقاط العلاقة الشعاعية على المحور $(O, \vec{i})$ نجد:

ومنه $F_x = ma_{Gx}$

$$-kx(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

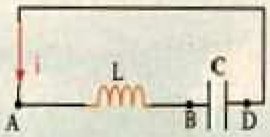
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لـ x.
حل هذه المعادلة التفاضلية هو دالة جيبية بدلالة الزمن
من الشكل : $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi)$

عبارة الدور الذاتي : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

طاقة الجملة : $E = ½m\, v^2(t) + ½\, k\, x^2(t)$

اهتزازات جملة كهربائية حرة ومثالية



في الدارة المهتزة ABD حسب قانون جمع التوترات لدينا في كل لحظة :

$$u_{AB} + u_{BD} = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

شحنة المكثفة : $q = q_B$ حيث $i = \frac{dq}{dt}$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية تميز الاهتزازات الكهربائية الحرة غير المتخامدة في الدارة L,C .

حلها : $q(t) = Q\cos(\omega_0 t + \varphi)$

عبارة الدور الذاتي : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

طاقة الجملة : $E(t) = ½\frac{q^2}{C} + ½\, L\, i^2(t)$

تعيين المطابق الميكانيكي :

كتلة ونابض	R,L,C على التسلسل
المسافة : x	الشحنة الكهربائية : q
السرعة : $\frac{dx}{dt}$	شدة التيار الكهربائي: $i = \frac{dq}{dt}$
التسارع : $\frac{d^2x}{dt^2}$	مشتق التيار الكهربائي: $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$
كتلة الجسم : m	ذاتية الوشيعة : L
ثابت المرونة : k	مقلوب السعة : $\frac{1}{C}$